SIGNALS AND SYSTEMS - QUIZ 5

Problem 1

Signalet $x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$ har den

Fouriertransformerede $X(\omega) = \tau \,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$.

Hvad er den Fouriertransformerede af $x(t-t_0) = \mathrm{rect}\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)$.

1: $Y(\omega) = \tau \,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) e^{-j\omega_0 t}$

2: $Y(\omega) = (\tau - t_0)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega(\tau - t_0)}{2}\right)$

3: $Y(\omega) = \tau \,\mathrm{sinc}\left(\frac{(\omega - \frac{2\pi}{t_0})\tau}{2}\right)$

4: Den Fouriertransformerede findes ikke.

Sol

Time-shift teoremet siger $x(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(\omega)$.

Så $Y(\omega) = e^{-j\omega t_0} X(\omega) = \tau \,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) e^{-j\omega t_0}$

Svar: 1

Problem 2

Et LTIC-system er beskrevet ved ligningen

$(D+1)y(t) = 2Dx(t)$.

Hvad er frekvenskarakteristikken for systemet?

1: $H(\omega) = \frac{2}{j\omega+1}$

2: $H(\omega) = \frac{2j\omega}{j\omega+1}$

3: $H(\omega) = 2\delta(t) + \frac{2}{j\omega+1}$

4: Frekvenskarakteristikken eksisterer ikke.

Sol

Tjek først rødderne i det karakteristiske polynomium.

$$\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$$

Alle rødder har negativ realdel, så Fouriertransformationen eksisterer for systemet.

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

$$(j\omega+1)Y(\omega) = 2j\omega X(\omega)$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{2j\omega}{j\omega+1}$$

Svar: 2

Problem 3

Betragt et reelt signal $x(t)$ med den transformerede $X(\omega)$. Vælg det sande udsagn om symmetrieyenskaberne for $X(\omega)$.

1: Hvis $x(t)$ er et lige signal, $x(t) = x(-t)$, gælder at $X(\omega)$ er en reel og lige funktion.

Sandt: $$X(\omega) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x_e(t)\cos(\omega t)\,dt}_{\text{Real and even}} + \underbrace{j\int_{-\infty}^{\infty} x_o \sin(\omega t)\,dt}_{\text{Imaginary and odd}}$$

2: Hvis $x(t)$ er lige, så er $X(\omega)$ imaginær og lige.

Falsk: $X(\omega)$ vil være reel og lige.

3: Hvis $x(t)$ er lige, så er $X(\omega)$ reel og ulige.

Falsk

4: Hvis $x(t)$ er lige, så er $X(\omega)$ imaginær og ulige.

Falsk

Svar: 1

Problem 4

Hvad er den Fouriertransformerede af $x(t) = \delta(t-t_0)$?

1: $X(\omega) = e^{j\omega t_0}$

2: $X(\omega) = 1$

3: $X(\omega) = e^{-j\omega t_0}$

Sol

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) e^{-j\omega t_0} dt$$

$$= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = e^{-j\omega t_0}$$

Maple:

with (inttrans);

fourier(Dirac(t-to), t, w) => $e^{-j\omega t_0}$

Svar: 3

Problem 5

Et Fouriertransformationspar er givet:

$$x(t) = e^{-2t} u(t) \longleftrightarrow X(\omega) = \frac{1}{2 + j\omega}.$$

Herunder er givet en række transformationspar. Vælg det sande svar.

1: $x_2(t) = e^{-2(t-2)} u(t-2) \longleftrightarrow X_2(\omega) = \frac{e^{-j\omega 2}}{2 + j\omega}$

Sandt: fourier$\left(e^{-2(t-2)}\right.$ Heaviside$(t-2)$, t, ω) $\rightarrow \frac{e^{-j\omega 2}}{2 + j\omega}$ (Maple)

2: $x_3(t) = e^{-2t} e^{j3t} u(t) \longleftrightarrow X_3(\omega) = \frac{1}{2 + j(\omega - 3)}$

Sandt: fourier$\left(e^{-2t} e^{j3t}\right.$ Heaviside(t), t, ω) $\rightarrow \frac{1}{2 - 3j + j\omega}$

3: $x_1(t) = e^{-6t} u(t) \longleftrightarrow X_1(\omega) = \frac{3}{6 + j\omega}$

Falsk: fourier$\left(e^{-6t}\right.$ Heaviside(t), t, ω) $\longrightarrow \frac{1}{6 + j\omega}$

Svar: Der er mere end ét sandt udsagn.

Problem 6

Vælg den frekvenskarakteristik tilhørende

$x(t) = e^{-2t}\cos(3t)\,u(t)$.

1: $X(\omega) = \dfrac{1/2}{2+j(\omega+3)} + \dfrac{1/2}{2+j(\omega-3)}$

Sandt: invfourier$\left(\dfrac{0.5}{2+j(\omega+3)} + \dfrac{0.5}{2+j(\omega-3)}, \omega, t\right) \rightarrow e^{-2t}\cos(3t)$ Heaviside(t).

2: $X(\omega) = \dfrac{1/2}{2+j(\omega+3)} - \dfrac{1/2}{2+j(\omega-3)}$

Falskt: invfourier$\left(\dfrac{0.5}{2+j(\omega+3)} - \dfrac{0.5}{2+j(\omega-3)}, \omega, t\right) \rightarrow -j$ Heaviside$(t)\sin(3t)e^{-2t}$

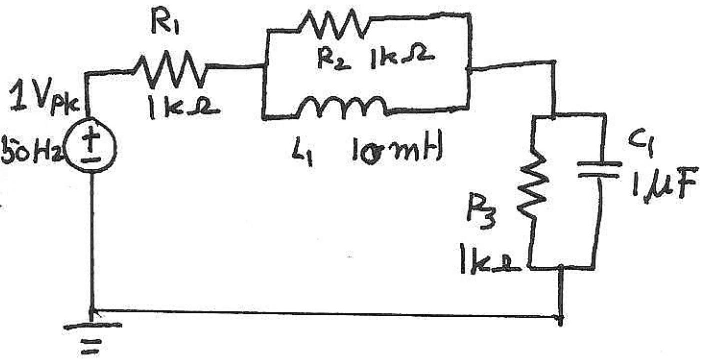
3: $X(\omega) = \dfrac{1/2}{2+j(\omega+3)} + \dfrac{1/2}{2-j(\omega-3)}$

Falsk: invfourier$\left(\dfrac{0.5}{2+j(\omega+3)} + \dfrac{0.5}{2-j(\omega-3)}, \omega, t\right) \rightarrow \frac{1}{2}e^{(2+j3)t}$ Heaviside$(-t) + \frac{1}{2}e^{(-2-j3)t} \cdot$ Heaviside(t)

Svar: 1

Problem 7

Vælg sande udsagn om kredsløbet.



1: Ved den viste frekvens er spolens impedans $Z_{L1} = j31.4\,\Omega$

Falsk: $Z_{L1} = j\omega L_1 = j \cdot 2\pi \cdot 50\,\text{Hz} \cdot 10 \cdot 10^{-3}\,H = j3.14\,\Omega$

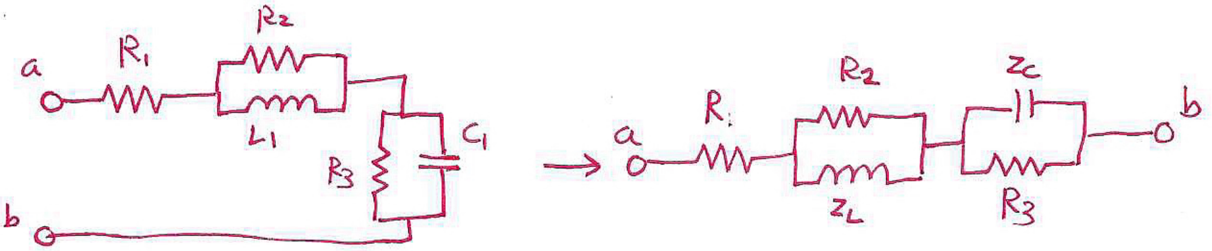
2: Ved den viste frekvens er kondensatorens impedans $Z_{C1} = -j3183\,\Omega$.

Sandt: $Z_{C1} = \frac{1}{j\omega C_1} = \frac{1}{j \cdot 2\pi \cdot 50\text{Hz} \cdot 1 \cdot 10^{-6} F} = -j3183\,\Omega$

3: Den totale impedans signalgeneratoren ser ud i er

$Z_{total} = 1910.2 - j282.8\,\Omega$.

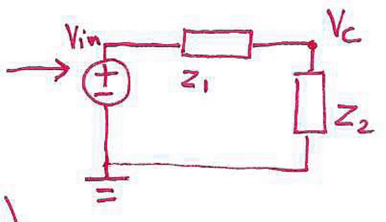
Sandt:



$$Z_{total} = Z_{ab} = R_1 + \left(\frac{R_2 \cdot Z_L}{R_2 + Z_L}\right) + \left(\frac{R_3 \cdot Z_C}{R_3 + Z_C}\right) = 1910.2 - j282.8\,\Omega$$

4: Peak-amplituden af spændingsfaldet over C_1 er 494 mV.

$Z_1 = R_1 + \frac{Z_{L1} \cdot R_2}{Z_{L1} + R_2}$, $Z_2 = \frac{Z_{C1} \cdot R_3}{Z_{C1} + R_3}$



$$V_c = V_{in} \cdot \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (\max V_{in} = 1V)$$

$$V_{c,peak} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \cdot 1V = \frac{910 - j285\,\Omega}{1000 + j3.14 + 910 - j285\,\Omega} \cdot 1V = 0.488 - j0.77\,V$$

$$|V_{c,peak}| = |0.488 - j0.77| = 0.494\,V$$

Sandt

<u>Svar:</u> Der er mere end ét sandt udsagn